Movimenti Howell

Ho scritto queste note perché non sono riuscito a trovare in internet un algoritmo che permetta di calcolare i movimenti di Tornei Howell. Con qualche fatica ne ho elaborato uno personalmente che permette di calcolarli, sia completi che ridotti in maniera abbastanza efficiente.

Nel seguito ne descrivo i principi.

1. **Howell completo**
   - 2*N coppie si incontrano su N tavoli utilizzando N boards diverse.
   - Ogni coppia, in turni diversi, incontra ogni altra coppia e mai due volte la stessa. Quindi i turni sono 2*N-1.
   - Ad ogni turno tutte le coppie giocano sugli N tavoli, utilizzando boards diversi.
   - Ogni coppia gioca tutti i boards e ciascuno una sola volta. Il numero di boards è uguale al numero dei turni.

Traduciamo queste specifiche in una tabella "Boards - Turni".
Consideriamo cioè una matrice in cui ogni colonna rappresenta un turno di gioco e ogni riga rappresenta una board. La matrice ha (2N-1)*(2N-1) caselle. In queste dobbiamo sistemare gli 2N*(2N-1) incontri tra coppie. Devono esserci solo N caselle occupate per ogni riga e lo stesso per ogni colonna. In ogni colonna ogni coppia deve figurare una e una sola volta, perché ad ogni turno tutte le coppie giocano e non possono giocare contemporaneamente su tavoli diversi. In ogni riga ogni coppia deve figurare una e una sola volta, perché ogni board deve essere giocato da tutte le coppie e giocato una sola volta.
Come esempio prendiamo il caso di 5 tavoli.

Prendiamo una coppia qualsiasi, per esempio la 10 e abbiniamola a tutte le altre nove. Non si perde di generalità piazzando queste coppie in modo ordinato sulla diagonale principale della matrice.
Infatti la permutazione dei numeri di coppia da sempre luogo a configurazioni valide e così pure lo scambio di righe tra di loro o di colonne tra di loro. Lo scambio di righe equivale a rinominare le boards e lo scambio di colonne equivale a rinominare i turni.
Esempio di tabella per 5 tavoli in cui sono riportati gli abbinamenti di coppie:

Turni

Boards	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1-10		8-2		6-7	9-4		3-5	
2		2-10		9-3		7-8	1-5		4-6
3	5-7		3-10		1-4		8-9	2-6	
4		6-8		4-10		2-5		9-1	3-7
5	4-8		7-9		5-10		3-6		1-2
6	2-3	5-9		8-1		6-10		4-7	
7		3-4	6-1		9-2		7-10		5-8
8	6-9		4-5	7-2		1-3		8-10	
9		7-1		5-6	8-3		2-4		9-10

Questa è una tabella corrispondente ad un torneo Howell completo. Si può osservare che le specifiche sono tutte rispettate.
Nel seguito descriviamo l'algoritmo con cui si possono generare tornei Howell con numero teoricamente arbitrario di tavoli.

Osserviamo che, tolta la diagonale principale, tutti i rimanenti abbinamenti di coppie si possono ripartire in "Ntavoli-1" gruppi, che chiameremo catene, con distanza 1,2,3,...., Ntavoli-1.

Per esempio la catena di distanza uno è: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-1 .

Ogni abbinamento è ottenuto dal precedente incrementando di 1 ciascuna coppia modulo Nturni (in questo caso modulo 9, cioè 9+1=1).

Decidiamo di allocare una catena ordinata in una sottodiagonale completa seguendo l'ordine della sottodiagonale. La prima sottodiagonale completa, ordinata in modo crescente è costituita dall'insieme delle caselle "i-j" con

i={2,3,4,5,6,7,8,9,1} e, corrispondemente,
j={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

La seconda si ha con

i={3,4,5,6,7,8,9,1,2} e, corrispondemente,
j={1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Le sottodiagonali sono costituite da 9 caselle, come gli elementi delle catene.

Il vantaggio di questo criterio di allocazione della catena è costituito dal fatto che è sufficiente controllare che il rispetto delle specifiche sia verificato per un solo elemento. Se, per esempio, vediamo che le coppie 5-6 possono essere collocate nella casella 9-8 della tabella, potremo allocare tutte le altre combinazioni di coppie della catena a cui appartiene 5-6 , in modo ordinato, nella stessa sottodiagonale, perché i vincoli verranno rispettati automaticamente. L'allocazione di un combinazione di coppie in una casella è possibile se le due coppie non sono presenti nella riga e nella colonna a cui la casella appartiene.

Consideriamo l'ultima riga della tabella. L'allocazione delle combinazioni 2-4, 8-3, 7-1 e 5-6 determina completamente il riempimento della tabella. Le quattro combinazioni di coppie appartengono rispettivamente alle catene di distanza 2, 4, 3, 1; si intende distanza modulo 9.

Supponiamo di conoscere la corretta allocazione delle coppie di numeri nell' ultima riga. Completiamo la tabella allocando le catene nelle diagonali a partire da queste coppie. In questo modo risulterà completata anche la prima colonna della tabella. Come conseguenza della assunzione di correttezza della disposizione scelta, la prima colonna conterrà tutti i numeri di coppia da 1 a 10. In particolare la combinazione 1-10 si trova nella prima casella della colonna. Gli elementi della prima colonna, a parte 1-10, possono quindi essere ricercati sulla base delle loro proprietà: devono essere uno per tipo di catena; il loro insieme deve contenere tutte le coppie da 2 a 9; le loro distanze dagli elementi della ultima riga devono essere tutte diverse (altrimenti starebbero su una stessa diagonale). Nell'esempio visto 7-1,6-9 hanno distanza 1, 5-6,2-3 hanno distanza 3 ecc.

Riassumendo, l'algoritmo di costruzione della tabella si articola nelle seguenti fasi:

1. Allocazione della diagonale principale.
2. Costruzione delle catene.
3. Scelta di un elemento, per ciascuna catena, in modo tale che l'insieme di questi elementi contenga una e una sola volta tutte le coppie, escluso la 9 e la 10, già presenti nella diagonale principale.
4. Ricerca di un altro set di elementi completo con distanze tutte diverse dagli elementi base.
5. Allocazione delle catene nelle sottodiagonali determinate dalle distanze tra gli omologhi elementi nell'ultima riga e la prima colonna.

Come si vede l'algoritmo non porta in modo diretto ad una soluzione, ma riduce in modo drammatico il numero di tentativi da effettuare, in modo che, per una tabella corrispondete a 20 tavoli il tempo di calcolo è inferiore al secondo.

2. Horwell ridotto

Succede spesso che uno schema Howell completo non soddisfi le esigenze di un torneo reale per quanto riguarda il numero di turni. Per esempio se ci sono 7 tavoli i turni risultano 13, che spesso sono pochi se si gioca una board a turno e sono troppi per giocarne 2 a turno. Si vorrebbero giocare 20 boards per avere una durata accettabile del torneo. Si può ridurre il torneo a 10 turni rinunciando al vincolo che ogni coppia giochi con tutte le altre, ma mantenendo quello che ogni coppia giochi tutte le boards. Per ottenere questo non è sufficiente eliminare le ultime 3 colonne della tabella. In questo modo la tabella risulterebbe rettangolare e il numero di boards resterebbe quello del caso completo; le boards sarebbero in numero maggiore a quello dei turni e non tutte verrebbero giocate da tutti i giocatori.

Bisogna allora eliminare anche delle righe dalla tabella (in questo caso 3), cioè eliminare delle boards per riportarle al numero dei turni, ma questo comporta un completo riallocamento della tabella.

Vediamo questo esempio relativo a 7 tavoli e 10 turni:

Boards \ Turni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1-14			11-10	13-7		4-6	12-9	2-3	5-8
2	6-9	2-14			11-1	13-8		5-7	12-10	3-4
3	4-5	7-10	3-14			11-2	13-9		6-8	12-1
4	12-2	5-6	8-1	4-14			11-3	13-10		7-9
5	8-10	12-3	6-7	9-2	5-14			11-4	13-1	
6		9-1	12-4	7-8	10-3	6-14			11-5	13-2
7	13-3		10-2	12-5	8-9	1-4	7-14			11-6
8	11-7	13-4		1-3	12-6	9-10	2-5	8-14		
9		11-8	13-5		2-4	12-7	10-1	3-6	9-14	
10			11-9	13-6		3-5	12-8	1-2	4-7	10-14

Osserviamo che nel caso completo viene naturale, come prima operazione, allocare nella diagonale principale la coppia 14 abbinata a tutte le altre coppie (dalla 1 alla 13). Non sarebbe stato possibile fare la stessa cosa per la coppia 13 allocandola in una sottodiagonale, perché l'abbinamento 14-13 è già stato utilizzato. Se però eliminiamo 3 turni, la diagonale principale si arresta a 14-10, quindi si possono allocare in sottodiagonali tre catene anomale formate dalla coppia 13, dalla 12 e dalla 11, ciascuna abbinata alle coppie {1,...,10}. Di nuovo tutte le possibili combinazioni delle coppie da 1 a 10 che rimangono possono essere raggruppate in tre catene lunghe dieci (il nuovo numero di turni). Anche le catene anomale godono della proprietà che è sufficiente che un loro elemento sia compatibile con una casella della tabella perché tutta la loro catena lo sia, se posta in modo ordinato.

Riassumendo, l'algoritmo si modifica di poco rispetto al precedente:

1. Allocazione della diagonale principale.
2. Costruzione di tutte le catene (Ntavoli-1)
3. Eliminazione di un numero di catene equivalente al numero di turni eliminati. Devono essere eliminate necessariamente quelle a distanza maggiore : ad esempio con 5 tavoli e 8 turni la catena a distanza 4 modulo 8 avrebbe una ripetizione di elementi.
4. Scelta di un elemento, per ciascuna catena rimasta, in modo tale che l'insieme di questi elementi contenga ogni coppia una sola volta; risultano escluse le coppie presenti nella ultima casella della diagonale principale più un numero di coppie uguale al numero di turni eliminati (nel nostro esempio 3).
5. Costruzione delle catene anomale (es. del 13, del 12 e 11), ciascuna abbinata, come primo elemento a una delle coppie mancanti al punto 4 (stiamo parlando degli elementi da allocare nell'ultima riga della tabella).
6. Ricerca di un altro set di elementi completo con distanze tutte diverse dagli elementi base.
7. Allocazione delle catene nelle sottodiagonali determinate dalle distanze tra gli omologhi elementi nell'ultima riga e la prima colonna.

Come esempio finale mostriamo una tabella relativa a 11 tavoli e 20 turni che potrebbe rappresentare un torneo giocato con 20 boards.

Boards \ Turni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1-22		21-8	6-15		5-13		14-17	2-7				3-9		18-19	4-11		10-12	16-20	
2		2-22		21-9	7-16		6-14		15-18	3-8				4-10		19-20	5-12		11-13	17-1
3	18-2		3-22		21-10	8-17		7-15		16-19	4-9				5-11		20-1	6-13		12-14
4	13-15	19-3		4-22		21-11	9-18		8-16		17-20	5-10				6-12		1-2	7-14	
5		14-16	20-4		5-22		21-12	10-19		9-17		18-1	6-11				7-13		2-3	8-15
6	9-16		15-17	1-5		6-22		21-13	11-20		10-18		19-2	7-12				8-14		3-4
7	4-5	10-17		16-18	2-6		7-22		21-14	12-1		11-19		20-3	8-13				9-15	
8		5-6	11-18		17-19	3-7		8-22		21-15	13-2		12-20		1-4	9-14				10-16
9	11-17		6-7	12-19		18-20	4-8		9-22		21-16	14-3		13-1		2-5	10-15			
10		12-18		7-8	13-20		19-1	5-9		10-22		21-17	15-4		14-2		3-6	11-16		
11			13-19		8-9	14-1		20-2	6-10		11-22		21-18	16-5		15-3		4-7	12-17	
12				14-20		9-10	15-2		1-3	7-11		12-22		21-19	17-6		16-4		5-8	13-18
13	14-19				15-1		10-11	16-3		2-4	8-12		13-22		21-20	18-7		17-5		6-9
14	7-10	15-20				16-2		11-12	17-4		3-5	9-13		14-22		21-1	19-8		18-6	
15		8-11	16-1				17-3		12-13	18-5		4-6	10-14		15-22		21-2	20-9		19-7
16	20-8		9-12	17-2				18-4		13-14	19-6		5-7	11-15		16-22		21-3	1-10	
17		1-9		10-13	18-3				19-5		14-15	20-7		6-8	12-16		17-22		21-4	2-11
18	3-12		2-10		11-14	19-4				20-6		15-16	1-8		7-9	13-17		18-22		21-5
19	21-6	4-13		3-11		12-15	20-5				1-7		16-17	2-9		8-10	14-18		19-22	
20		21-7	5-14		4-12		13-16	1-6				2-8		17-18	3-10		9-11	15-19		20-22

Ovviamente non si può avere un numero di turni inferiore al numero di tavoli. Però per un numero di tavoli dispari si può avere un numero di turni uguale al numero di tavoli; in tal caso la tabella risulta completamente occupata.

Esempi

Boards \ Turni	1	2	3
1	1-6	4-3	5-2
2	5-3	2-6	4-1
3	4-2	5-1	3-6

Boards \ Turni	1	2	3	4	5
1	1-10	7-4	9-2	6-5	8-3
2	8-4	2-10	7-5	9-3	6-1
3	6-2	8-5	3-10	7-1	9-4
4	9-5	6-3	8-1	4-10	7-2
5	7-3	9-1	6-4	8-2	5-10

Boards \ Turni	1	2	3	4	5	6	7
1	1-14	11-4	13-2	8-7	9-6	12-3	10-5
2	10-6	2-14	11-5	13-3	8-1	9-7	12-4
3	12-5	10-7	3-14	11-6	13-4	8-2	9-1
4	9-2	12-6	10-1	4-14	11-7	13-5	8-3
5	8-4	9-3	12-7	10-2	5-14	11-1	13-6
6	13-7	8-5	9-4	12-1	10-3	6-14	11-2
7	11-3	13-1	8-6	9-5	12-2	10-4	7-14

Si può osservare che queste tabelle equivalgono perfettamente a tornei di tipo Mitchell ove metà delle coppie incontrano solo le coppie dell'altra metà. Per ottenere esattamente i movimenti Mitchell è necessario, ad ogni turno, numerare i tavoli in maniera opportuna.

Come è noto i movimenti Mitchell si possono generare più efficacemente in altra maniera.

Da ultimo osserviamo che non esiste una soluzione per un torneo Mitchell completo di tre tavoli, cioè con 5 turni. Esiste però una soluzione per 4 turni. Quindi è possibile "completare" il torneo aggiungendo il turno mancante in cui 3 gruppi di boards vengono fatte ruotare sui tre tavoli.

Per esempio:

4 turni * 2 boards + 1 turno * 6 boards (3 gruppi di 2) = 14 boards

4 turni * 3 boards + 1 turno * 6 boards (3 gruppi di 2) = 18 boards

4 turni * 3 boards + 1 turno * 9 boards (3 gruppi di 3) = 21 boards

Questo è un espediente che funziona ma non rispetta i vincoli dati in partenza perché il gruppo di boards dell' ultimo turno è virtuale in quanto viene spezzato sui tre tavoli.